

5 Relações Constitutivas

Notação:

σ_{ij} - Tensor das tensões

E_{ijkl} - tensor de rigidez

ϵ_{ij} - Tensor das deformações infinitesimais

S_{ijkl} - tensor de flexibilidade

β_{ij} - Tensor ortogonal de transformação de coordenadas

λ, μ - constantes de Lamé

$\mu_{ij,kl}$ - Coeficientes de Chentsov

$\eta_{i,jk}$ - coeficientes de Rabinovich

E_i - Módulo de Young generalizado

G_{ij} - Módulo de corte generalizado

ν_{ij} - Coeficiente de Poisson generalizado

5.1 Introdução

Os conceitos de tensão e deformação aplicam-se a todos os meios contínuos e são independentes do material de que são feitos. Estão sujeitos a certos princípios genéricos, por exemplo o estado de tensão tem de verificar a condição de equilíbrio de forças e de momentos. Mas esses princípios não determinam, por si só, o estado de tensão e deformação dos corpos pois não distinguem os diversos materiais que os constituem. A diversidade dos materiais e dos seus comportamentos é caracterizada por relações constitutivas.

As relações constitutivas descrevem as diferentes propriedades de um material, que podem ser mecânicas, de condução de calor, de resistência elétrica, etc. As propriedades mecânicas, que estudaremos neste capítulo, são especificadas por relações entre as tensões e as deformações num corpo.

Como vimos anteriormente, os estados de tensão e deformação num corpo são dados pelos tensores das tensões e das deformações em todos os pontos do corpo, cujas componentes podem ser representadas em notação direta σ , indicial σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ ou matricial, por

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

relativamente a um referencial cartesiano x_1, x_2, x_3 . Ambos os tensores são simétricos. Por razões abaixo indicadas, selecionou-se o tensor das deformações infinitesimal para descrever o estado de deformação no corpo.

5.2 Sólidos de Hooke

Neste capítulo iremos apresentar as expressões mais simples que descrevem o comportamento mecânico dos materiais sólidos. Essas relações constitutivas são designadas por lei de Hooke e os sólidos que as seguem são chamados sólidos de Hooke, cientista inglês contemporâneo de Newton.

Saliente-se que as relações constitutivas são modelos matemáticos que descrevem materiais ideais. Não existe o material "sólido de Hooke". O que existe são materiais que, quando sujeitos a certa gama de forças ou deformações, se comportam aproximadamente como o modelo matemático prevê.

Este modelo descreve um comportamento elástico do material, isto é, que i) recupera a sua forma inicial quando cessam as causas da deformação e ii) o faz de forma instantânea. Assume também uma relação linear entre tensões e deformações. Admite-se que o gradiente dos deslocamentos é pequeno, utilizando-se o tensor das deformações infinitesimal.

O “sólido de Hooke” representa uma primeira aproximação ao comportamento elástico de um material, válida quando as deformações são pequenas.

Outros modelos descrevem comportamentos diferentes dos materiais: comportamento elástico com grandes deformações, comportamento plástico, em que o material não recupera a sua forma inicial e fica com deformações permanentes, ou comportamento viscoelástico, em que o material não assume a sua forma final instantaneamente, antes de forma gradual e dependente da velocidade de aplicação das solicitações exteriores.

No sólido de Hooke, portanto, o tensor das tensões é proporcional ao tensor das deformações, representando-se a relação constitutiva nas formas

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.3)$$

em que E_{ijkl} e S_{ijkl} são tensores de quarta ordem designados, respetivamente, por tensor de rigidez e tensor de flexibilidade e cujas componentes são constantes, independentes do estado de tensão e deformação. Se o corpo for não-homogêneo as componentes variam de ponto para ponto do corpo.

Estes tensores são definidos por $3^4 = 81$ componentes quando $i, j, k, l = 1, 2, 3$. A simetria dos tensores da tensão e da deformação, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, implica que

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}, \quad S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (5.4)$$

Devido a estas condições de simetria, das 81 componentes dos tensores de rigidez e flexibilidade apenas 36 são independentes. Além disso, admitindo a existência para os materiais elásticos de uma função “energia interna”, mostra-se que dessas 36 constantes só 21 são independentes.

Se for possível reduzir o número de variáveis independentes do problema e considerá-lo como um caso de tensão plana ou deformação plana, o número de constantes independentes dos tensores de rigidez e flexibilidade passa de 36 para 9 ou, admitindo a existência da função “energia interna”, de 21 para 6 (ver Secção 5.5).

5.3 Isotropia

Para a maioria dos materiais sólidos o número de constantes independentes é muito inferior a 21. Essa diminuição deve-se a simetrias, relativamente a certos planos ou linhas, que em cada ponto a estrutura dos materiais pode ter.

A maior redução consegue-se quando o material é isotrópico: significa que, no ponto em consideração, o comportamento do material é o mesmo em todas as direções.

Em termos mais rigorosos, o material é isotrópico se os componentes dos tensores E_{ijkl} e S_{ijkl} tiverem o mesmo valor numérico em todos os referenciais obtidos por uma qualquer rotação de eixos do referencial inicial.

No referencial inicial, a relação constitutiva linear elástica escreve-se

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

No referencial rodado x'_1, x'_2, x'_3 , as coordenadas estão relacionadas com as iniciais por

$$x'_i = \beta_{ij} x_j,$$

em que β_{ij} é o tensor ortogonal de transformação entre referenciais. As componentes do tensor das tensões e do tensor das deformações nos dois referenciais estão relacionadas por

$$\sigma'_{ij} = \beta_{ik} \beta_{jl} \sigma_{kl}, \quad \varepsilon'_{ij} = \beta_{ik} \beta_{jl} \varepsilon_{kl},$$

e a lei de transformação para tensores de quarta ordem permite escrever

$$E'_{ijkl} = \beta_{im} \beta_{jn} \beta_{ko} \beta_{lp} E_{mnop}.$$

A relação constitutiva no novo referencial escreve-se

$$\sigma'_{ij} = E'_{ijkl} \varepsilon'_{kl}.$$

Se o material for, no ponto em consideração, isotrópico, então

$$E'_{ijkl} = E_{ijkl}.$$

para todas as matrizes ortogonais (β_{ij}). Pode-se mostrar que a isotropia permite reduzir a especificação de E_{ijkl} a duas constantes independentes λ e μ , na forma

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (5.5)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker. A lei constitutiva é, nesse caso, dada por

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (5.6)$$

Esta relação pode ser invertida, obtendo-se a deformação (ε_{ij}) que corresponde a um estado de tensão (σ_{ij}):

$$\varepsilon_{ij} = 1 / (2 \mu) (\sigma_{ij} - \lambda / (3 \lambda + 2 \mu) \sigma_{kk} \delta_{ij}). \quad (5.7)$$

Os parâmetros do material λ e μ designam-se por constantes de Lamé.

Em engenharia utilizam-se preferencialmente constantes do material com significado físico e que estão relacionadas com as componentes dos tensores de rigidez E_{ijkl} e flexibilidade S_{ijkl} ou com as constantes de Lamé λ e μ . Iremos na próxima secção estabelecer relações entre as diferentes constantes que caracterizam os sólidos de Hooke isotrópicos.

5.3.1 Propriedades elásticas dos materiais: módulos e coeficientes

Para todos os corpos feitos do mesmo material elástico isotrópico, o valor do quociente entre a tensão média, definida pela força dividida pela área em que está aplicada, e a deformação média na direção da força, definida pela variação de comprimento por unidade de comprimento inicial (ver exemplo na Figura 5-1), é constante. Esse quociente é o módulo de Young E do material,

$$E = \sigma / \varepsilon = (F/A) / (\ell/L) \quad (5.8)$$

e tem unidades de tensão, pois a deformação é adimensional.

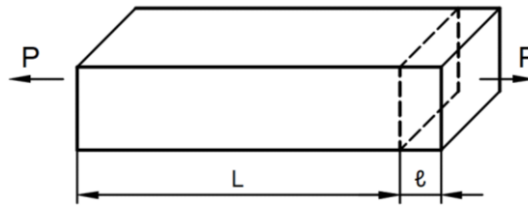


Figura 5-1 - Deformação na direção da força aplicada

O material alonga na direção da força, mas também contrai lateralmente. Na direção perpendicular, o valor da deformação é ϵ_L , diferente de ϵ (ver Figura 5-2). Poisson descobriu que, para um dado material, o quociente ϵ_L/ϵ é constante e o seu simétrico é designado por coeficiente de Poisson do material:

$$\nu = - \epsilon_L/\epsilon. \tag{5.9}$$

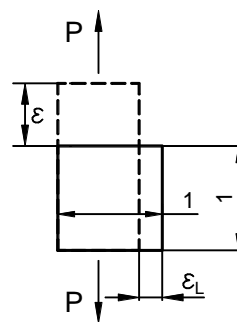


Figura 5-2 – Deformação devida ao coeficiente de Poisson.

Esta propriedade material não se designa por módulo pois não mede um efeito direto. É um coeficiente, uma quantidade adimensional obtida pela razão entre duas deformações e que caracteriza o acoplamento entre elas.

Se as forças aplicadas no corpo têm a mesma direção, mas não são colineares, o material tem localmente tendência a deslizar um sobre o outro em vez de alongar (ver Figura 5-3). A tensão média é agora tangente à superfície em que está aplicada e denomina-se de corte. O seu valor obtem-se igualmente dividindo a força pela área da superfície. A deformação média é medida angularmente, descrevendo o efeito do corte, e representa-se por γ .

O quociente entre a tensão de corte e a deformação de corte é constante para todos os corpos feitos de um dado material elástico e designa-se por módulo de corte G do material,

$$G = \tau / \gamma = (P/A) / \gamma. \tag{5.10}$$

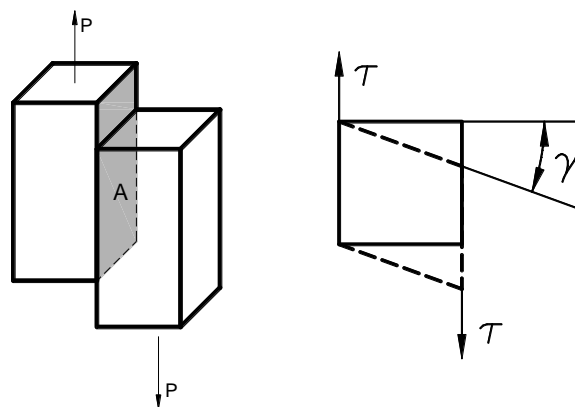


Figura 5-3 – Deformação de corte.

Apresentamos agora dois exemplos que permitem relacionar as constantes de Lamé com as constantes materiais E, ν e G.

5.3.2 Corte puro

O campo de deslocamentos de um quadrado de lado unitário é dado por: $u_1 = \gamma a_2$, $u_2 = u_3 = 0$, conforme a Figura 5-4.

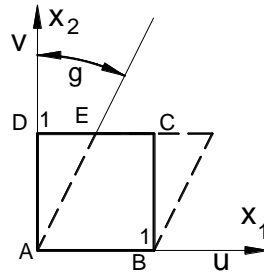


Figura 5-4 - Deformação de corte puro.

O tensor das deformações (obtido utilizando a relação deformação-deslocamento) e o das tensões (obtido utilizando (5.6) são

$$[\epsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

em que $\tau = \mu \gamma$. Comparando com (5.10) conclui-se que $\mu = G$, o módulo de corte.

5.3.3 Tração uniaxial

O estado de tração uniaxial numa barra é dado pelo seguinte tensor das tensões:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Utilizando a lei constitutiva (5.7), o tensor das deformações correspondente é

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_L & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_L \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

com $\epsilon = \mu (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu) \sigma$ e $\epsilon_L = -\lambda / (2\mu (3\lambda + 2\mu)) \sigma$. Comparando com a definição de módulo de Young $E = \sigma / \epsilon$ e com a definição de coeficiente de Poisson $\nu = -\epsilon_L / \epsilon$, verifica-se que estas duas constantes se relacionam com as constantes de Lamé por

$$E = \mu (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu), \quad \nu = \lambda / (2\lambda + 2\mu) \quad (5.14)$$

5.3.4 Relação constitutiva usando as constantes elásticas E e ν

A relação constitutiva para materiais elásticos, lineares e isotrópicos pode agora ser escrita utilizando o módulo de Young e o coeficiente de Poisson:

$$\epsilon_{ij} = 1 / E [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad (5.15)$$

$$\sigma_{ij} = E / (1 + \nu) [\epsilon_{ij} + \nu / (1 - 2\nu) \epsilon_{kk} \delta_{ij}] \quad (5.16)$$

As expressões anteriores têm uma representação sugestiva utilizando notação matricial. Para isso apresentam-se os tensores da tensão e da deformação como vetores coluna com 6 componentes,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix},$$

e a relação constitutiva isotrópica do sólido de Hooke toma a forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

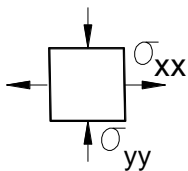
Nos últimos três termos da diagonal principal utilizou-se a relação $G = E / (2(1+\nu))$ que será estabelecida no exemplo seguinte.

5.3.5 Exemplo 5.1 – Relação entre módulos para materiais isotrópicos.

Considere uma placa fina feita de um material que obedece à relação constitutiva de Hooke isotrópica. O carregamento da placa dá origem ao seguinte estado de tensão $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \sigma$ (constante) e todas as outras componentes nulas. Determine a tensão e a deformação num plano a 45° com os eixos x e y para concluir que $G = E / (2(1+\nu))$ num material isotrópico.

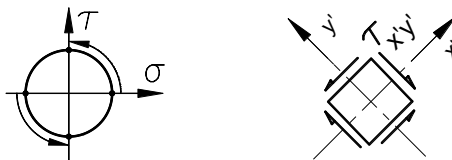
Resolução

A partir do estado de tensão e aplicando a Lei de Hooke, obtemos o estado de deformação:



$$\epsilon_{xx} = 1/E \sigma_{xx} - \nu/E \sigma_{yy} = (1+\nu)/E \sigma, \quad \epsilon_{yy} = 1/E \sigma_{yy} - \nu/E \sigma_{xx} = -(1+\nu)/E \sigma$$

Rodando 45° o estado de tensão (90° no plano de Mohr), obtemos um estado de tensão de corte puro:



com $\tau_{xy} = \sigma$. Fazendo o círculo de Mohr para as deformações, obtém-se a 45° a distorção: $\gamma/2 = (1+\nu)/E \sigma$

O módulo de corte G do material é dado por $G = \tau / \gamma$ e portanto $G = E / [2(1+\nu)]$.

Repare-se que se utilizou a lei de Hooke de um material isotrópico: isso implica que, se rodarmos a placa arbitrariamente e aplicarmos o mesmo estado de tensão biaxial definido acima (e que não acompanha a rotação da placa), obteremos sempre o mesmo estado de deformação.

O quociente $\tau / \gamma = G$ é portanto igual a $E/[2(1+\nu)]$.

5.4 Sólidos de Hooke anisotrópicos

O conceito de isotropia permite reduzir ao máximo o número de constantes independentes do material mas não se aplica aos materiais que têm um comportamento marcadamente diferente em diferentes direções. Nesses casos é necessário considerar o material como anisotrópico e as componentes dos tensores de rigidez E_{ijkl} e de flexibilidade S_{ijkl} dependem do referencial utilizado.

Como referido anteriormente, esses tensores têm 81 componentes das quais 21 independentes. Para simplificar a descrição desses tensores utiliza-se uma notação matricial, introduzida na Secção 5.3.4, em que se representam os tensores da tensão e da deformação como vetores coluna com 6 componentes.

As relações tensão-deformação do sólido de Hooke anisotrópico escrevem-se na forma indicial e matricial,

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

para o tensor de rigidez e, para o tensor de flexibilidade,

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

A transformação das componentes dos tensores de rigidez e flexibilidade do referencial x_1, x_2, x_3 para outro referencial x'_1, x'_2, x'_3 , relacionados por

$$x'_i = \beta_{ij} x_j,$$

segue a lei de transformação dos tensores de quarta ordem:

$$E'_{ijkl} = \beta_{im} \beta_{jn} \beta_{ko} \beta_{lp} E_{mnop}, \quad S'_{ijkl} = \beta_{im} \beta_{jn} \beta_{ko} \beta_{lp} S_{mnop}. \quad (5.20)$$

Para as matrizes E_{ij} e S_{ij} utiliza-se a lei de transformação de matrizes

$$[E'] = [Q] [E] [Q]^T, \quad [S'] = [Q] [S] [Q]^T \quad (5.21)$$

em que a matriz de transformação $[Q]$ toma a forma apropriada, consoante a matriz a transformar. Por exemplo, no caso de transformação da matriz de rigidez $[E]$,

$$[Q] = \begin{bmatrix} q_{11}q_{11} & q_{12}q_{12} & q_{13}q_{13} & q_{12}q_{13} & q_{13}q_{11} & q_{12}q_{11} \\ q_{21}q_{21} & q_{22}q_{22} & q_{23}q_{23} & q_{23}q_{22} & q_{23}q_{21} & q_{22}q_{21} \\ q_{31}q_{31} & q_{32}q_{32} & q_{33}q_{33} & q_{33}q_{32} & q_{33}q_{31} & q_{32}q_{31} \\ 2 q_{31}q_{21} & 2 q_{32}q_{22} & 2 q_{33}q_{23} & q_{33}q_{22} + q_{32}q_{23} & q_{33}q_{21} + q_{31}q_{23} & q_{31}q_{22} + q_{32}q_{21} \\ 2 q_{31}q_{11} & 2 q_{32}q_{12} & 2 q_{33}q_{13} & q_{33}q_{12} + q_{32}q_{13} & q_{33}q_{11} + q_{31}q_{13} & q_{31}q_{12} + q_{32}q_{11} \\ 2 q_{21}q_{21} & 2 q_{12}q_{22} & 2 q_{13}q_{23} & q_{13}q_{22} + q_{31}q_{23} & q_{13}q_{21} + q_{11}q_{23} & q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

cujas componentes são produtos dos cossenos diretores $q_{ij} = n_i n_j$ entre referenciais.

Embora anisotrópicos, certos materiais têm uma estrutura que contém planos ou linhas de simetria. Nessas condições, as constantes elásticas de (5.18) e (5.19) não são todas independentes, podendo até ser nulas em referenciais que evidenciam essas simetrias. Nesta secção será apresentada uma classificação de materiais anisotrópicos baseada nas simetrias dos tensores de rigidez ou flexibilidade dos materiais.

5.4.1 Anisotropia triclinica

Neste caso não existem quaisquer simetrias do material e as matrizes de rigidez e flexibilidade são cheias. Apresentamos a matriz de flexibilidade escrita em termos das constantes elásticas que generalizam os módulos de Young e de corte e o coeficiente de Poisson:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & \eta_{23,1}/G_{23} & \eta_{13,1}/G_{13} & \eta_{12,1}/G_{12} \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & \eta_{23,2}/G_{23} & \eta_{13,2}/G_{13} & \eta_{12,2}/G_{12} \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & \eta_{23,3}/G_{23} & \eta_{13,3}/G_{13} & \eta_{12,3}/G_{12} \\ \eta_{1,23}/E_{11} & \eta_{2,23}/E_{22} & \eta_{3,23}/E_{33} & 1/G_{23} & \mu_{13,23}/G_{13} & \mu_{12,23}/G_{12} \\ \eta_{1,13}/E_{11} & \eta_{2,13}/E_{22} & \eta_{3,13}/E_{33} & \mu_{23,13}/G_{23} & 1/G_{13} & \mu_{12,13}/G_{12} \\ \eta_{1,12}/E_{11} & \eta_{2,12}/E_{22} & \eta_{3,12}/E_{33} & \mu_{23,12}/G_{23} & \mu_{13,12}/G_{13} & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Podemos identificar 5 tipos de constantes elásticas:

$E_{ii} := \sigma_{ii}/\varepsilon_{ii}$, $i=1, 2, 3$ (sem soma nos índices mudos), designam três módulos que generalizam o conceito de módulo de Young para o caso anisotrópico, em que a rigidez do material em três direções ortogonais pode ser diferente.

$G_{ij} := \sigma_{ij}/2\varepsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, designam três módulos de corte em planos paralelos aos planos do referencial ($i \neq j$) que generalizam o conceito de módulo de corte G isotrópico.

$\nu_{ij} := -\varepsilon_{ij}/\varepsilon_{ii}$, $i, j = 1, 2, 3$, $\sigma_{ij} = 0$ mas $\sigma_{ii} \neq 0$ (sem soma nos índices mudos), designam três coeficientes que generalizam o coeficiente de Poisson, caracterizando contração na direção j quando é aplicada tensão na direção i ($i \neq j$)

$\mu_{ij,kl} := -\varepsilon_{kl}/\varepsilon_{ij}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, $i \neq j$, $k \neq l$, $\sigma_{kl} = 0$ mas $\sigma_{ij} \neq 0$, designam três coeficientes de Chentsov, caracterizando deformações de corte em planos kl paralelos aos planos do referencial devido a tensões de corte atuando em planos ij ($ij \neq kl$) e que generalizam o efeito de Poisson às distorções.

$\eta_{i,jk}$, designam nove coeficientes de influência (ou de Rabinovich) de segunda espécie, caracterizando deformações de corte em planos jk devido a tensões normais aplicadas na direção i

O número total de constantes elásticas referidas é 21. As outras constantes apresentadas na matriz de flexibilidade não são independentes pois obtêm-se pelas seguintes condições de simetria:

$$v_{ij} / E_{ii} = v_{ji} / E_{jj}, \quad \mu_{ij,kl} / G_{ij} = \mu_{kl,ij} / G_{kl}, \quad \eta_{i,jk} / E_{ii} = \eta_{jk,i} / G_{jk} \quad (5.24)$$

Os nove coeficientes de influência do último quociente, $\eta_{jk,i}$ designam-se de primeira espécie e caracterizam deformações normais em direções i devido a tensões de corte aplicadas em planos jk .

A anisotropia triclinica corresponde ao caso mais geral de anisotropia em que não existe nenhum referencial em que se anula qualquer componente das matrizes de constantes elásticas.

5.4.2 Anisotropia ortotrópica

A maioria dos materiais de engenharia possui propriedades de simetria que implicam uma redução do número de constantes independentes do material. Como foi dito, em determinado referencial que reconheça essa simetria, as matrizes de rigidez e flexibilidade deixam de ser cheias e passam a ter elementos nulos.

É o caso de um material fibroso em que as fibras estão alinhadas na direção dos eixos x_1, x_2 e x_3 . Tal material tem 3 planos ortogonais de simetria e designa-se por ortotrópico. Pode-se mostrar que nesse caso tanto os 9 coeficientes de influência $\eta_{i,jk}$ como os 3 coeficientes de Chentsov $\mu_{ij,kl}$ são nulos e portanto não existe acoplamento entre tensões de corte e extensões longitudinais, e as deformações de corte são produzidas exclusivamente por tensões de corte que atuam nesses planos, conduzindo à seguinte matriz de flexibilidade:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -v_{21}/E_{22} & -v_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -v_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{13}/E_{11} & -v_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

com as condições de simetria (sem soma nos índices mudos):

$$v_{ij} / E_{ii} = v_{ji} / E_{jj} \quad (5.26)$$

No caso de ortotropia, o número de constantes independentes é 9: 3 módulos de Young generalizados, 3 módulos de corte generalizados e 3 coeficientes de Poisson generalizados.

Saliente-se que esta representação da matriz das constantes elásticas, que evidencia as constantes independentes, corresponde a um referencial alinhado com as direções de simetria do material. Noutro referencial qualquer, todas as componentes dessa matriz poderão ser não nulas.

5.4.3 Isotropia transversal

Este modelo de lei constitutiva é mais simples que o anterior e justifica-se em muitas aplicações. Voltando ao exemplo do material fibroso, consideremos o caso em que as fibras estão dispostas numa matriz isotrópica e estão todas alinhadas com o eixo x_3 . Nesse caso o material é isotrópico no plano $x_1 x_2$ e diz-se que tem isotropia transversal:

$$E_{11} = E_{22}, \quad G_{13} = G_{23}, \quad v_{13} = v_{23}, \quad G_{12} = E_{11} / (2 (1 + v_{12})) \quad (5.27)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -v_{12}/E_{11} & -v_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{12}/E_{11} & 1/E_{11} & -v_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{13}/E_{11} & -v_{13}/E_{11} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Neste caso o número de constantes independentes é 5.

5.4.4 Simetria cúbica

O material com simetria cúbica é um material ortotrópico em que as três direções de ortotropia têm constantes iguais. Neste caso é possível uma redução do número de constantes independentes para 3 uma vez que

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E, \quad G_{13} = G_{23} = G_{12} = G, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{12} = \nu \quad (5.29)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Contudo não existe relação entre E, G e ν .

Um exemplo de material com esta simetria é a liga de níquel monocristalina utilizada nas turbinas dos motores de avião.

5.4.5 Isotropia

Neste caso duas constantes caracterizam as propriedades mecânicas do material e entre E, G e ν existe a relação $G = E / (2(1 + \nu))$. A lei de Hooke isotrópica toma a forma apresentada em (5.17), com as relações adicionais:

$$G = \mu, \quad \lambda = E\nu / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)), \quad k = E / (3(1 - 2\nu)), \quad G = E / ((2(1 + \nu))) \quad (5.31)$$

em que $k = (\sigma_{ii}/3)/\epsilon_{ii}$ é o módulo de compressibilidade volumétrica.

5.5 Elasticidade plana

Em muitas situações é possível reduzir uma situação tri-dimensional a um caso plano devido à geometria particular do problema e às cargas aplicadas. Essa redução do número de variáveis independentes pode dar origem a simplificações consideráveis. Por isso vamos agora apresentar as matrizes de rigidez e flexibilidade do sólido de Hooke anisotrópico e isotrópico para os casos de deformação plana e tensão plana.

5.5.1 Deformação plana

Dizemos que um corpo está em deformação plana quando o campo de deslocamentos no corpo tem a forma

$$u_z = 0 \quad \text{e} \quad u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y).$$

O estado de deformação plana é típico em corpos longos (na direção z) com secção constante, sujeitos a forças que não variam nessa direção, como no caso dum tubo longo sujeito a pressão interna e externa. Em geral é necessário aplicar uma tensão $\sigma_{zz} \neq 0$ nas bases do corpo, para manter a condição $u_z = 0$.

Em notação indicial as condições de deformação plana escrevem-se

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0.$$

Num material ortotrópico as matrizes de rigidez e de flexibilidade podem ser reduzidas às seguintes matrizes de 3X3, num total de 6 constantes independentes:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = 1 / (a d - b c) \begin{bmatrix} a E_{11} & b E_{11} & 0 \\ c E_{22} & d E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (a d - b c) G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d/E_{11} & -b/E_{22} & 0 \\ -c/E_{11} & a/E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

onde $a = 1 - \nu_{32}\nu_{23}$, $b = \nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}$, $c = \nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}$, $d = 1 - \nu_{31}\nu_{13}$ e se teve em conta que em deformação plana $\varepsilon_{33} = 0 = -\nu_{13} \sigma_{11} / E_{11} - \nu_{23} \sigma_{22} / E_{22} + \sigma_{33} / E_{33} = 0$ e

$$\sigma_{33} = \nu_{13} E_{33} \sigma_{11} / E_{11} + \nu_{23} E_{33} \sigma_{22} / E_{22} \quad (5.34)$$

A adaptação das expressões anteriores para o caso isotrópico dá as seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\nu)E/((1+\nu)(1-2\nu)) & \nu E/((1+\nu)(1-2\nu)) & 0 \\ \nu E/((1+\nu)(1-2\nu)) & (1-\nu)E/((1+\nu)(1-2\nu)) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad G = E / (2(1+\nu)) \quad (5.35)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\nu^2)/E & -\nu(1+\nu)/E & 0 \\ -\nu(1+\nu)/E & (1-\nu^2)/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

5.5.2 Tensão plana

O estado de tensão plana é uma simplificação dum estado de tensão tridimensional e existe aproximadamente numa placa fina solicitada por forças no seu plano. Nas faces livres da placa, normais ao eixo z, teremos

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0.$$

e como a espessura da placa é pequena, admitimos que essas componentes são nulas em todos os pontos da placa. Em notação indicial

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

e as matrizes de rigidez e de flexibilidade do material da placa ortotrópica podem ser reduzidas às seguintes matrizes de 3X3:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{21}E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{33} = -\nu_{13} \sigma_{11} / E_{11} - \nu_{23} \sigma_{22} / E_{22}. \quad (5.38)$$

No caso de isotropia, da condição de tensão plana $\sigma_{33} = 0$,

$$\varepsilon_{33} = -(\nu / (1 - \nu)) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (5.39)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0 \\ \nu E/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & E/(2(1+\nu)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu)/E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

5.6 Comportamento anisotrópico de tecidos

Os tecidos são materiais comuns que têm um comportamento mecânico altamente anisotrópico. São constituídos por fios, fabricados a partir de fibras, que se cruzam ortogonalmente. A maneira como se deformam quando sujeitos a cargas (de tração) depende da direção de aplicação da carga.

Se a solicitação é na direção dos fios, como na Figura 5-5, o tecido deforma-se pouco (E elevado) e a contração lateral é pequena (coeficiente de Poisson baixo, perto de 0).

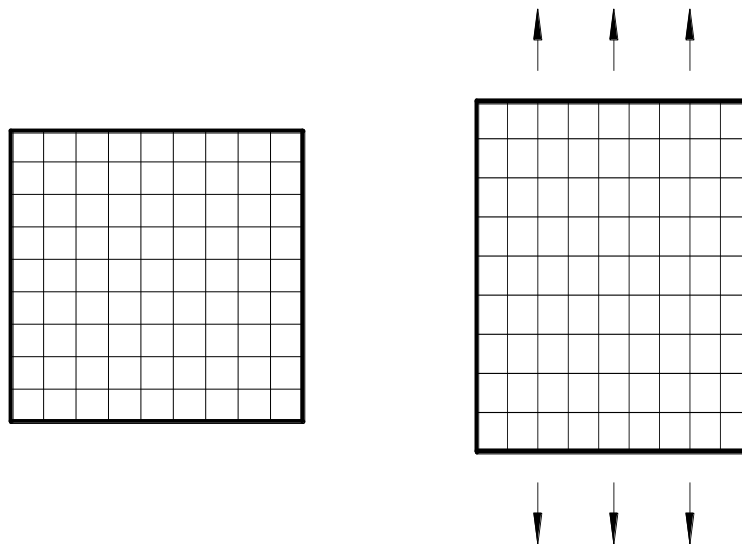


Figura 5-5 – Tecidos solicitados na direção das fibras

Quando a solicitação é a 45° com a direção dos fios, o tecido é muito mais flexível pois o módulo de Young nessa direção é muito inferior. A contração lateral é também muito maior: em certos casos o coeficiente de Poisson pode atingir valores próximos da unidade.

Se o tecido for puxado numa direção intermédia entre 0° e 45° , as deformações são grandes mas também assimétricas e o tecido fica torcido, sem interesse para a aplicação pretendida.

A direção de aplicação da carga não é o único fator a considerar na escolha de um material para uma aplicação. Também é necessário analisar o valor relativo dos módulos de Young e de corte. Por exemplo, a capacidade dos tecidos se ajustarem ao nosso corpo e aos nossos movimentos depende do módulo de corte. Se este for baixo, o tecido ajusta-se bem, mas se for alto não, razão porque ficamos mal com fatos de papel. Os tecidos tricotados têm módulo de Young e de corte baixo e ajustam-se bem ao nosso corpo.

Vamos agora considerar três exemplos de aplicação de tecidos. O primeiro é o guarda-chuva, que é constituído por uma haste e varetas que põem em tensão o tecido ou tela (Figura 5-6). Um corte na direção radial faz com que as varetas endireitem, o que mostra que as tensões predominantes na tela são tangenciais. Por essa razão é necessário fazer a tela de várias peças de tecido triangulares cozidas entre si e não de uma peça só, de forma a alinhar os fios do tecido com as tensões principais, para não ter rugas e vincos e conseguir fletir as varetas. Um bom guarda-chuva distingue-se pelo número elevado de varetas.

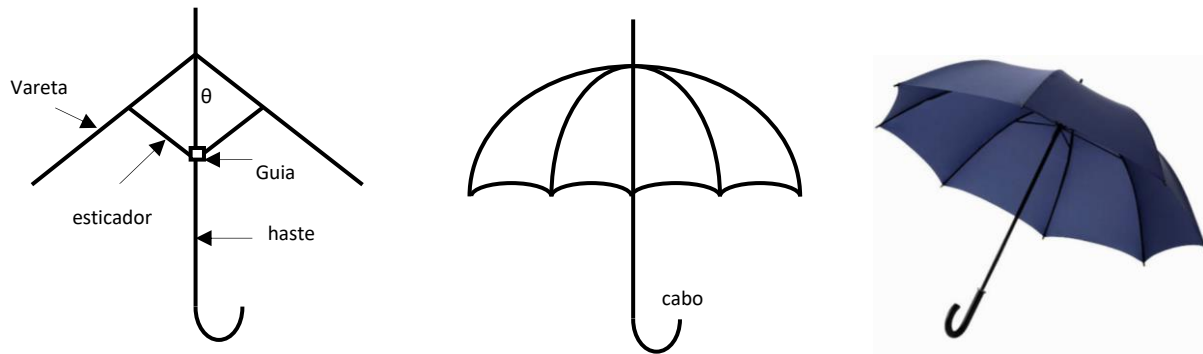


Figura 5-6 – Estrutura de um guarda-chuva



Figura 5-7 – Tecido numa tenda de campismo

O segundo exemplo descreve o fabrico das velas nos veleiros. Inicialmente as forças nas velas, devido à acção do vento, eram oblíquas às direcções das fibras. Só recentemente (século 19) é que o tecido das velas foi utilizado racionalmente, utilizando-se tela de algodão com as costuras direccionadas segundo as cargas aplicadas. Hoje em dia, como se vê na Figura 5-8, o tecido é cortado de tal forma que os fios são, tanto quanto possível, paralelos aos bordos livres da vela, que geralmente têm a direcção das tensões maiores.

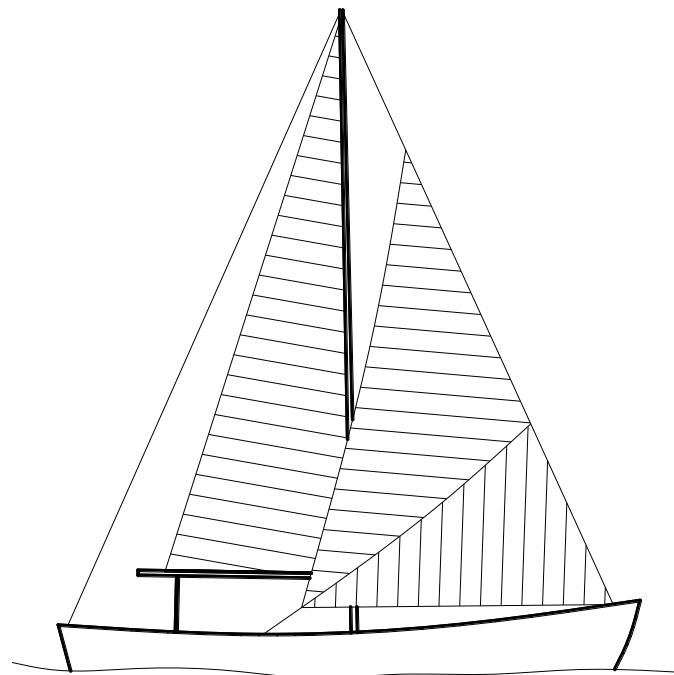


Figura 5-8 – Corte em tecido de velas

Quando o tecido é utilizado para vestuário, o problema é conseguir que aquele se conforme a uma forma tri-dimensional. Os costureiros começaram por cortar o tecido a direito (na direcção das fibras) e quando era necessário ter a roupa ajustada ao corpo utilizavam laços e cordões. Quando estes desapareceram, também por

razões económicas, inventou-se o corte em viés, em que o tecido é cortado a 45° com a direção dos fios (ver Figura 5-9). Assim, em vez dos laços e cordões, utiliza-se o peso do vestido e os movimentos do corpo para conseguir, por efeito de Poisson, o efeito de ajustamento.



Figura 5-9 – Efeito de Poisson num vestido

5.7 Exemplos de materiais anisotrópicos planos

Concluimos este capítulo com exemplos de materiais anisotrópicos planos que se encontram no mercado. São fornecidos na forma de camadas finas e são utilizados para resistir a cargas, isto é, têm uma função estrutural.

Os valores das propriedades E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} para quatro materiais distintos são apresentados na Tabela 1. Dois destes materiais são contituídos por fibras unidireccionais embebidas em resina epóxi e orientadas a 0° (Carbono/Epoxi T300/5208 e Vidro-S/Epoxi S2-449/SP 381), apresentando módulos de elasticidade (E_1 e E_2) bastante distintos nas duas direcções principais. Apresenta-se também um material com fibras dispostas perpendicularmente umas às outras e orientadas a 0° e 90° (Carbono/Epoxi bidireccional), podendo observar-se que neste caso os módulos de elasticidade E_1 e E_2 são iguais, sendo o coeficiente de Poisson neste referencial próximo de zero. Finalmente podem também encontrar-se nesta tabela as propriedades de um tecido entrelaçado de fibras de carbono embebidas em resina epóxi (BR45a), onde as fibras de carbono no tecido formam um ângulo de 45° entre si.

Tabela 1 - Propriedades de quatro materiais anisotrópicos planos

	Carbono/Epoxi T300/5208	Vidro-S/Epoxi S2-449/SP 381	Carbono/Epoxi Bidireccional	Carbono/Epoxi Tecido entrelaçado BR45a
E_1 [GPa]	181.00	47.66	54.00	40.40
E_2 [GPa]	10.30	13.31	54.00	19.60
G_{12} [GPa]	7.17	4.75	4.00	25.00
ν_{12}	0.28	0.27	0.04	0.75

Na Figura 5-10 são apresentadas as variações dos módulos de elasticidade E_x , E_y e G_{xy} com o ângulo de orientação do referencial (x,y) em relação ao referencial (1,2), para estes quatro materiais, enquanto que na Figura 5-11 são apresentadas as variações dos respectivos coeficientes de Poisson e de influência mútua de segunda espécie.

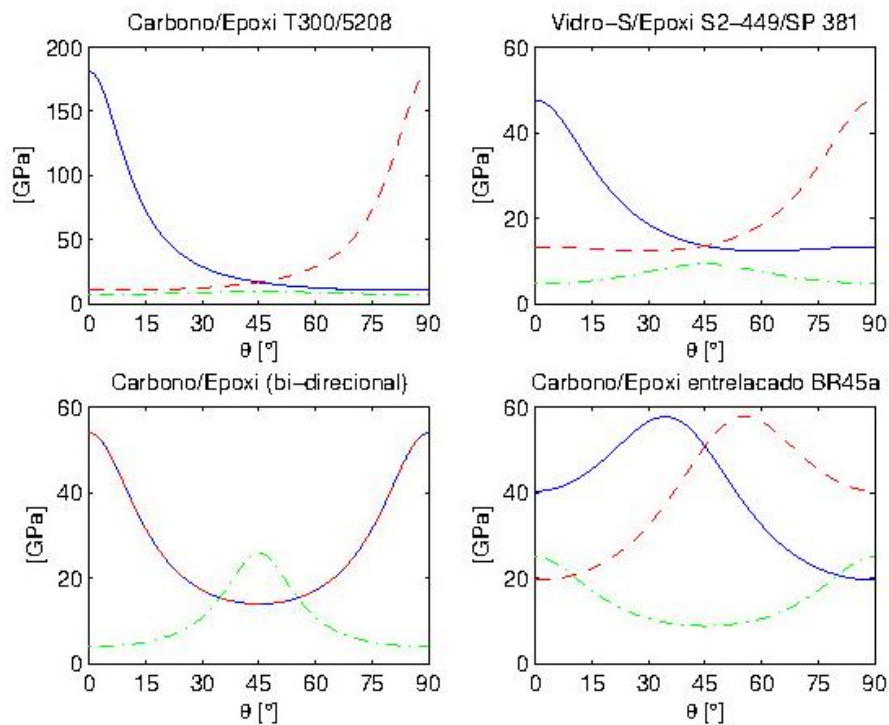


Figura 5-10 - Variação dos módulos de elasticidade E_x (traço contínuo azul), E_y (traço interrompido encarnado) e G_{xy} (traço-ponto verde) com a orientação do sistema de eixos, para quatro materiais anisotrópicos planos

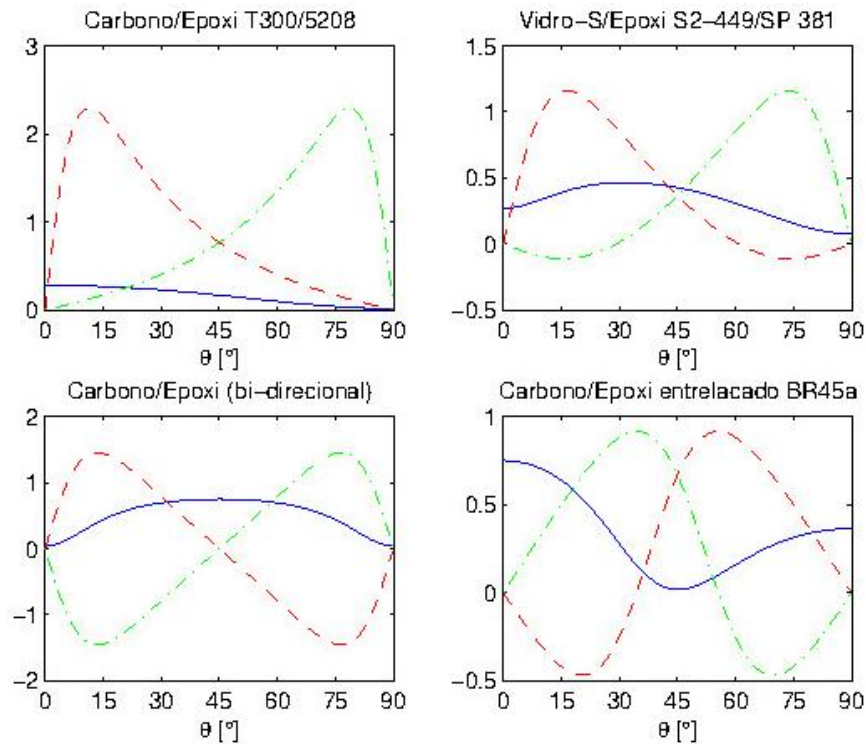


Figura 5-11 - Variação dos coeficientes de Poisson ν_{xy} (traço contínuo azul), de influência mútua $\eta_{x,xy}$ (traço interrompido encarnado) e $\eta_{y,xy}$ (traço-ponto verde) com a orientação do sistema de eixos, para quatro materiais anisotrópicos planos

Pelas figuras pode-se verificar que para os materiais com maior grau de anisotropia (carbono ou vidro com reforços unidireccionais ou bidireccionais), os módulos de elasticidade longitudinais são máximos a 0° e 90° , enquanto que o módulo de corte é máximo a 45° . Para o tecido de carbono BR45a o módulo de corte é máximo a 0° e 90° , enquanto que os módulos de elasticidade longitudinais são máximos para ângulos intermédios. Os coeficientes de influência mútua, que medem a interação entre deformação de corte e a deformação normal no plano, são sempre máximos para ângulos intermédios entre 0° e 90° . Note-se a concordância com o que foi descrito na secção anterior a propósito dos tecidos, com o andamento do coeficiente de Poisson para a fibra de carbono bidireccional, o qual é máximo numa direcção a 45° com a orientação das fibras.

Da observação do andamento das propriedades dos materiais com o ângulo do sistema de eixos relativamente ao sistema principal, pode concluir-se que as propriedades não são necessariamente máximas no sistema de eixos principal de simetria material.

5.8 Problemas Resolvidos

5.8.1 Exemplo 5.2 - Problema tensões/deformações e direções principais

O estado de tensão num ponto P é

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- Obter as tensões principais e as respetivas direções principais de tensão
- Obter a máxima tensão de corte no ponto P
- A direção normal ao plano onde ocorre a máxima tensão de corte
- Escrever o tensor das tensões no referencial de c)
- Calcular o tensor das deformações para um material com $E=65 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.3$

Resolução:

a) Resolver $|\sigma - \lambda I| = 0$ para obter as tensões principais

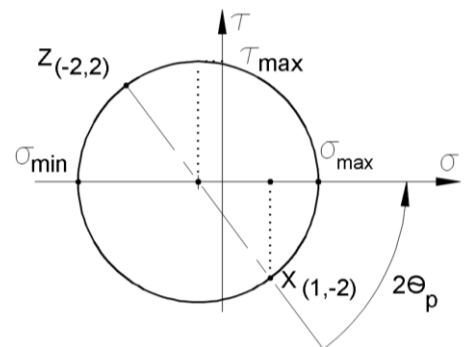
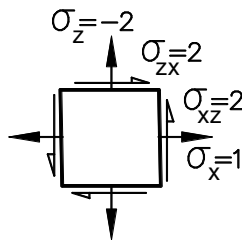
$$|\sigma - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(-2-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(-2-\lambda) - 4] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)[\lambda^2 + \lambda - 6] = 0$$

$$\sigma_1 = 2 \quad \sigma_2 = 1 \quad \sigma_3 = -3$$

Ou, usando o círculo de Mohr, considerar apenas o plano XZ, pois Y já é direção principal de tensão (não há tensão de corte em $[\sigma]$ associada à linha e coluna 2). Assim, temos:

$$\sigma_{e_1, e_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\text{center} = \left[\frac{1+(-2)}{2}, 0 \right] = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$$

$$\text{Radius} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma_1 = C + R = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$\sigma_3 = C - R = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$$

Como se pode ver, ambos os métodos deram os mesmos resultados.

Direções principais de tensão:

Resolver para $\lambda_1 = 2$:

$$[\sigma - \lambda_1 I] \{n\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

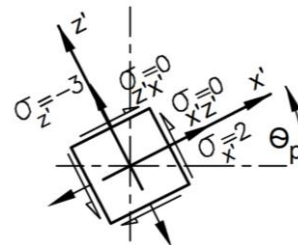
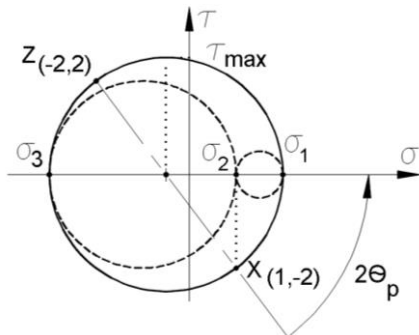
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n_1 + 2n_3 = 0 \\ -n_2 = 0 \\ 2n_1 - 4n_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 2n_3 \\ n_2 = 0 \\ n_3 = 1 \end{cases} \text{ normalizando } n^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \ 0 \ 1)$$

Como já sabíamos que $n^{\circ} = (0 \ 1 \ 0)$

O terceiro vetor próprio pode facilmente ser obtido por $n^{\circ} = n^{\circ} \times n^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \{-1 \ 0 \ 2\}$

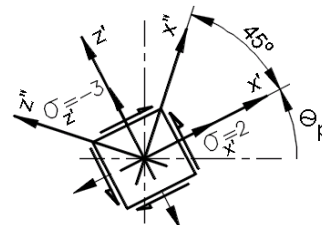
b) A máxima tensão de corte é $\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| = \frac{2 - (-3)}{2} = \frac{5}{2}$

Que corresponde ao raio do círculo de Mohr maior. Relembrar de que, em 3D, temos 3 círculos de Mohr correspondentes a cada plano:



c) Sabemos antecipadamente que a máxima tensão de corte atua num plano perpendicular ao plano definido por n° , n° rodado 45° em torno do eixo n° . A normal \tilde{n}_s pode ser obtida por

$$\tilde{n}_s \parallel (n^{\circ} + n^{\circ}) \Leftrightarrow \tilde{n}_s \parallel (1 \ 0 \ 3) \Leftrightarrow \tilde{n}_s = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 \ 0 \ 3)$$



d) A partir do círculo de Mohr de b) facilmente se escreve o tensor das tensões:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \text{Center} & 0 & -\text{Radius} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Radius} & 0 & \text{Center} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Notar o valor “-Radius” da convenção dos sentidos ao desenhar no plano de Mohr

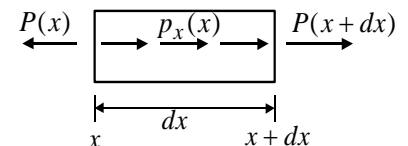
e) A equação constitutiva para materiais elásticos é $\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$

Neste exemplo $\sigma_{kk} = 1 + 1 + (-2) = 0$, e portanto $\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij}]$

$$\epsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times 10^6 = \frac{(1 + 0.3)}{65 \times 10^9} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times 10^6 = 2 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

5.8.2 Exemplo 5.3 – Equação de equilíbrio de uma barra

Obter a equação de equilíbrio da barra com carregamento axial.



Resolução

Fazendo o equilíbrio na direção x: $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow P(x + dx) - P(x) + p_x dx = 0$

Dividindo por dx: $\frac{P(x + dx) - P(x)}{dx} + p_x = 0$

E fazendo o limite quando $dx \rightarrow 0$: $\frac{\partial P}{\partial x} + p_x = 0$

Como se tem $\sigma_{xx} = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_{xx} A = (E\epsilon_{xx})A = EA \frac{\partial u_x}{\partial x}$

E substituindo na equação de equilíbrio, obtemos a equação diferencial: $\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + p_x = 0$

Note-se que EA pode ser extraído de $\frac{\partial}{\partial x} (\quad)$ se, e só se, forem constantes ao longo da barra.

5.8.3 Exemplo 5.4 – Relação tensão/deformação

Para um sólido elástico, linear e isotrópico, $E= 200 \text{ GPa}$, $\nu= 0.3$ o estado de tensão é dado por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

- a) Determine o tensor das deformações no corpo.
- b) Inverta a Eq. $\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$ para obter as componentes do tensor das tensões em função das componentes do tensor das deformações. Apresente o resultado em termos das constantes $G = \tau/\gamma$ e ν , em vez de E e ν .
- c) Considere a viga encastrada representada na Figura 5-12, sujeita a uma força P . Estabeleça as condições de fronteira de tensão nas cinco faces onde existem tensões aplicadas (que podem ser nulas).

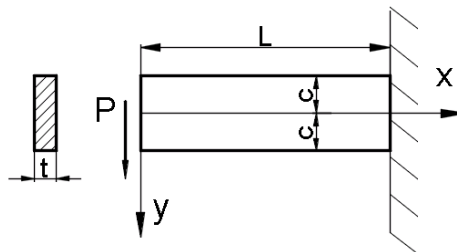


Figura 5-12 – Estado de Tensão numa viga.

- d) Determine as constantes A e B para a distribuição de tensões $\sigma_{xx} = A x y$, $\tau_{xy} = B + \frac{3P}{4tc^3} y^2$ da alínea c), que verifica todas as equações e condições.

Resolução

- a) Tendo $\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$ Onde $\sigma_{kk} = \text{traço } \sigma = 18 \text{ MPa}$ obtém-se

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 18\nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[\begin{bmatrix} 12+12\nu & 0 & 4+4\nu \\ 0 & 0 & 0 \\ 4+4\nu & 0 & 6+6\nu \end{bmatrix} - 18\nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 12-6\nu & 0 & 4+4\nu \\ 0 & -18\nu & 0 \\ 4+4\nu & 0 & 6-12\nu \end{bmatrix} =$$

$$\frac{10^6}{200 \times 10^9} \begin{bmatrix} 10.2 & 0 & 5.2 \\ 0 & -5.4 & 0 \\ 5.2 & 0 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 \times 10^{-5} & 0 & 2.6 \times 10^{-5} \\ 0 & -2.7 \times 10^{-5} & 0 \\ 2.6 \times 10^{-5} & 0 & 1.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

- b) De $\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$ fazendo o termo

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{kk} - 3\nu\sigma_{kk}] \Leftrightarrow E\varepsilon_{kk} = (1-2\nu)\sigma_{kk} \Leftrightarrow \sigma_{kk} = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}$$

Substituindo σ_{kk} em $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$ obtém-se

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right] \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right]$$

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right)$$

Fazendo $G = \frac{\tau}{\gamma}$ temos $\tau_{ij} \text{ (para } i \neq j) = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{ij}) = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\gamma_{ij}}{2} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ij} = G\gamma_{ij} \Rightarrow \frac{E}{(1+\nu)} = 2G$

E finalmente $\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right)$

c) nas quatro faces longitudinais o vetor tensão é nulo. Assim:

faces $y = \pm c : \sigma_{yy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 \qquad z = \pm \frac{t}{2} : \sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

Na face onde está aplicada a força P, temos $n = (-1 \ 0 \ 0)$, e da fórmula de Cauchy

$$T_i = \sigma_{ji} n_j = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \text{ em que } \sigma_{xx} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0$$

$$\int_{z=-\frac{t}{2}}^{z=+\frac{t}{2}} \int_{y=-c}^{y=+c} \tau_{xy} \, dy \, dz = P$$

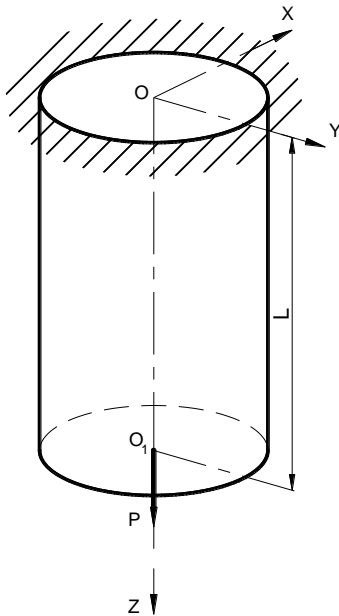
d) As tensões são $\sigma_{xx} = Axy \qquad \tau_{xy} = B + \frac{3P}{4tc^3} y^2$

Da equação de equilíbrio $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0$, na ausência de forças volúmicas:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow Ay + \frac{3P}{2tc^3} y = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{3P}{2tc^3}$$

Da condição de fronteira $\tau_{yx} = 0$ em $y = \pm c$ vem $B + \frac{3P}{4tc^3} c^2 = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{3P}{4tc}$

5.8.4 Exemplo 5.5 - Barra anisotrópica à tração



Exemplo adaptado de (Lekhnitskii 1981).

Considere a barra prismática (de área da secção transversal A) feita de um material homogéneo e anisotrópico, de acordo com a figura. A barra está fixa na face superior e sujeita à força P na extremidade livre.

O material obedece à Lei de Hooke generalizada sendo S_{ij} as constantes elásticas.

Admite-se válido o Princípio de Saint-Venant.

Admite-se que a força P e a reação na face superior são uniformemente distribuídas nas respectivas secções, assim:

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0$$

A lei de Hooke generalizada é:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Como a única tensão não nula é $\sigma_{zz} = P/A$, obtemos

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{P}{A} \begin{Bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \\ S_{34} \\ S_{35} \\ S_{36} \end{Bmatrix}$$

e como

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Por integração pode-se obter u, v e w, onde $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u_0, v_0, w_0$ são constantes provenientes de deslocamentos de corpo rígido, que não contribuem para a deformação:

$$u = \frac{P}{A} (s_{13} x + s_{36} y + s_{35} z) + \omega_2 z - \omega_3 y + u_0$$

$$v = \frac{P}{A} (s_{23} y + s_{34} z) + \omega_3 x - \omega_1 z + v_0$$

$$w = \frac{P}{A} (s_{33} z) + \omega_1 y - \omega_2 x + w_0$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ estão relacionados com rotações em torno dos eixos coordenados e u_0, v_0, w_0 com deslocamentos ao longo desses eixos.

Admitindo que para $x=y=z=0$ se tem

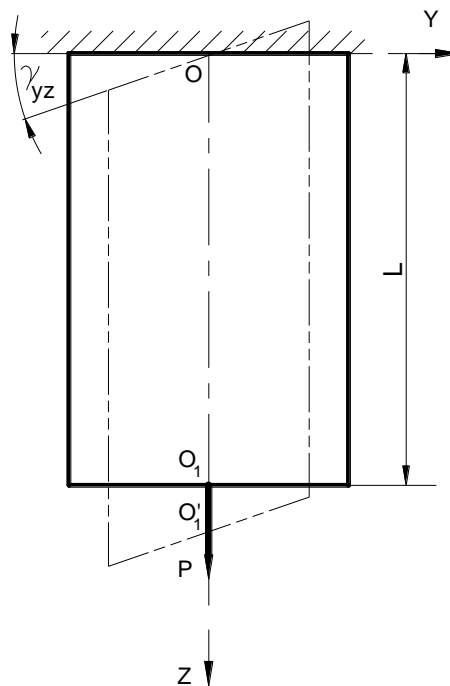
$$u = v = w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ (sem rotação)}$$

Obtemos

$$u = \frac{P}{A} \left(s_{13} x + \frac{1}{2} s_{36} y \right)$$

$$v = \frac{P}{A} \left(\frac{1}{2} s_{36} x + s_{23} y \right)$$

$$w = \frac{P}{A} (s_{35} x + s_{34} y + s_{33} z)$$

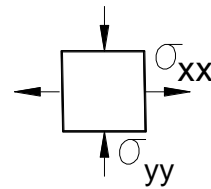


5.8.5 Exemplo 5.6 - Placa em tensão plana (do 2º Teste 2015/16)

Considere uma placa retangular fina em tensão plana feita de um material que obedece à Lei de Hooke.

- a) Determine a matriz de flexibilidade do material se este for isotrópico ($E = 200 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $\nu = 0.25$). Determine o quociente entre a tensão τ_{xy} e a deformação γ_{xy} .
- b) Determine a matriz de flexibilidade do material se este tiver simetria cúbica ($E = 200 \text{ GPa}$, $G = 40 \text{ GPa}$, $\nu = 0.25$). Determine o quociente entre a tensão τ_{xy} e a deformação γ_{xy} .
- c) O carregamento da placa dá origem ao seguinte estado de tensão $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = 100 \text{ MPa}$ (constante) e todos os outros componentes nulos. Determine o quociente entre a tensão (de corte) num plano paralelo a z e igualmente inclinado com os eixos x e y e a deformação (de corte) correspondente para ambas as placas das alíneas anteriores.
- d) Use o conceito da alínea c) para obter E e ν nesse mesmo plano.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{yx} & -\nu_{zx} & 0 & 0 & 0 \\ E_{xx} & E_{yy} & E_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy} & 1 & -\nu_{zy} & 0 & 0 & 0 \\ E_{xx} & E_{yy} & E_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz} & -\nu_{yz} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E_{xx} & E_{yy} & E_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$



Resolução

- a) da lei constitutiva, para tensão plana eliminam-se as componentes com "z":

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{yx} & 0 \\ E_{xx} & E_{yy} & 0 \\ -\nu_{xy} & 1 & 0 \\ E_{xx} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Como $E_{xx}=E_{yy}=E$, também o coeficiente de Poisson cruzado é idêntico, e temos

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ E & E & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ E & E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

A relação pedida é: $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{1}{80 \times 10^9} \sigma_{xy} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = G = 80 \times 10^9$

b) Neste caso as propriedades E, G e ν são independentes, mas a relação pedida é exatamente a mesma de a)

exceto no valor de G: $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{1}{40 \times 10^9} \sigma_{xy} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = G = 40 \times 10^9$

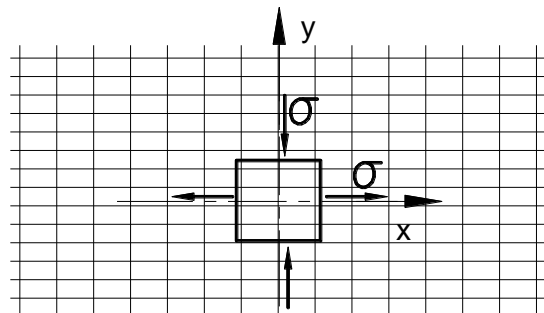
c) Para a placa de material isotrópico, a relação $\sigma_{xy} / \gamma_{xy}$ mantém-

se em todas as direções: $\frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = G = 80 \times 10^9$

Para a placa de material cúbico temos de calcular o estado de tensão e de deformação no referencial inicial (por ser nesse que é válida a lei constitutiva da alínea a). Como nos pedem a relação $\sigma_{xy} / \gamma_{xy}$ num referencial rodado 45° com o inicial, teremos de efetuar a rotação do estado de tensão e de deformação para esse novo referencial ($x'y'$) e calcular a relação $\sigma_{x'y'} / \gamma_{x'y'}$.

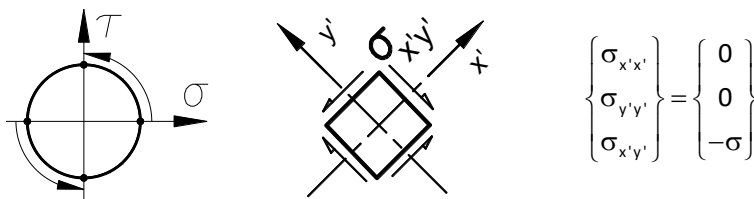
Com o estado de tensão dado, temos

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ -\sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \\ -\sigma \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

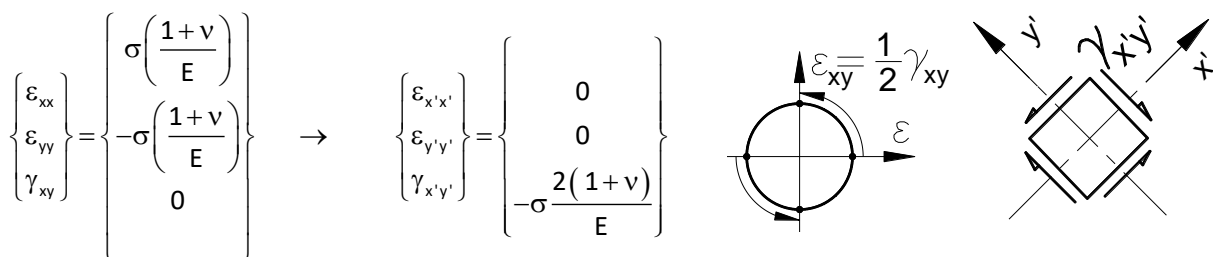


Neste caso a distorção é nula, quer no material isotrópico, quer no material ortotrópico.

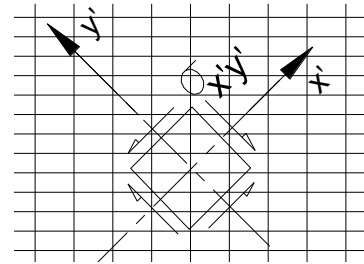
Se rodarmos 45° este estado de tensão (ver círculo de Mohr), para os novos eixos $x' y'$ ficamos com corte puro:



Fazendo o mesmo (rotação de 45°) para as deformações (extensões normais ϵ_{xx} e ϵ_{yy} versus distorções ϵ_{xy}), usando também o círculo de Mohr, obtemos as deformações nos eixos $x' y'$. Por definição, $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$



A relação $\frac{\sigma_{x'y'}}{\gamma_{x'y'}} = \frac{-\sigma}{-\sigma \frac{2(1+\nu)}{E}} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200 \times 10^9}{2(1+0.25)} = 80 \times 10^9$



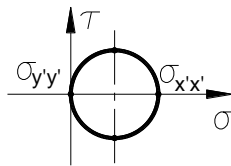
Note-se que o valor obtido (80 GPa) não corresponde ao valor do módulo de corte G do material ortotrópico (40 GPa), o que pode parecer estranho, pois a relação $\frac{E}{2(1+\nu)}$ dá o módulo de corte G ... mas para materiais isotrópicos.

d) para obter o Módulo de Young de um material usamos um estado de tensão uniaxial e calculamos a relação $E = \sigma / \epsilon$.

O procedimento volta a ser:

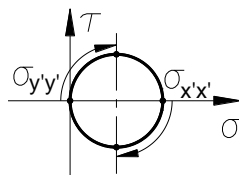
- nos eixos $x'y'$ o estado de tensão será uniaxial $(\sigma, 0, 0)$, e cuja representação no círculo de Mohr é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



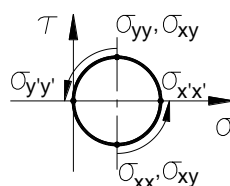
- rodar esse estado de tensão 45° no sentido horário para obter o estado de tensão em xy , obtendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma/2 \\ \sigma/2 \\ \sigma/2 \end{Bmatrix}$$



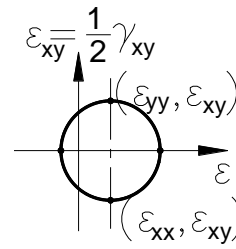
Ou seja, o estado de tensão no referencial xy $(\sigma/2, \sigma/2, \sigma/2)$, corresponde ao estado de tensão uniaxial $(\sigma, 0, 0)$ no referencial $x'y'$:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma/2 \\ \sigma/2 \\ \sigma/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Tendo a tensão em xy , calculamos o estado de deformação em xy pela lei constitutiva dada, e representa-se no círculo de Mohr das deformações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sigma}{2} \\ \frac{\sigma}{2} \\ \frac{\sigma}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{2E} \sigma \\ \frac{1-\nu}{2E} \sigma \\ \frac{\sigma}{2G} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{2E} \sigma \\ \frac{1-\nu}{2E} \sigma \\ \frac{\sigma}{4G} \end{Bmatrix}$$



(relembrar que o círculo de Mohr das deformações usa ε_{xy} (onde $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$))

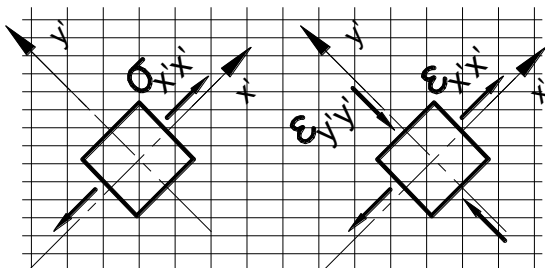
Rodando agora o estado de deformação de 45° , obtemos a deformação no referencial $x'y'$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{2E} \sigma + \frac{1}{4G} \sigma \\ \frac{1-\nu}{2E} \sigma - \frac{1}{4G} \sigma \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E podemos calcular o Módulo de Young e o coeficiente de Poisson em $x'y'$:

$$E' = \frac{\sigma_{x'x'}}{\varepsilon_{x'x'}} = \frac{\sigma}{\frac{1-\nu}{2E} \sigma + \frac{1}{4G} \sigma} = \frac{4GE}{2G(1-\nu) + E} = 123.1 \text{ GPa}$$

$$\nu' = -\frac{\varepsilon_{y'y'}}{\varepsilon_{x'x'}} = -\frac{\frac{1-\nu}{2E} \sigma - \frac{1}{4G} \sigma}{\frac{1-\nu}{2E} \sigma + \frac{1}{4G} \sigma} = -\frac{\frac{1-\nu}{2E} - \frac{1}{4G}}{\frac{1-\nu}{2E} + \frac{1}{4G}} = 0.54$$



Resumindo

Referencial xy : $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 40 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.25$.

Referencial $x'y'$: $E' = 123.1 \text{ GPa}$, $G' = 80 \text{ GPa}$ e $\nu' = 0.54$.